Tutorato 5 GE220

DOCENTE: MASSIMILIANO PONTECORVO. ESERCITATORE: RAFFAELE CARBONE.
TUTORI: GIOVANNI PASSERI. BRUNO RENZI.
GIOVEDÌ 5 APRILE 2018.

Esercizio 1. *Consideriamo il quadrato* $Q := [-1,1] \times [-1,1] \subseteq \mathbb{R}^2$. *Il gruppo diedrale* D_4 *induce naturalmente un'azione su* Q.

1. *Verificare che* D_4 *induce anche un'azione su* $\mathbb{R}^2$.
2. *Calcolare l'orbita di un vertice di* Q *e di un punto su una sua diagonale.*
3. *Calcolare l'orbita degli elementi sull'asse* x *di* $\mathbb{R}^2$.
4. *Dire se è vero che* $\mathbb{R}^2/D_4 \approx Q/D_4$.

Esercizio 2. *Consideriamo il gruppo con due elementi* $C_2 = \{-1, 1\}$. *Consideriamo l'applicazione* $C_2 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(t, x) \mapsto tx$.

1. *Ricordare che l'applicazione data è un'azione di gruppo.*
2. *Trovare un sottospazio topologico di* $\mathbb{R}^3/C_2$ *omeomorfo al piano proiettivo.*
3. *Dire se* $\mathbb{R}^3/C_2$ *ammette un sottospazio omeomorfo al piano euclideo.*
4. *Dire se* $\mathbb{R}^3/C_2$ *contiene un sottospazio omeomorfo a* $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. *Consideriamo l'azione di* $\mathbb{Z}^2$ *per traslazione,* $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $((n,m),(x,y)) \mapsto (x+n, y+m)$

1. *Descrivere l'orbita del punto* $(1, 0)$.
2. *Dato* $P = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$ *quanti sono i punti dell'orbita contenuti nel quadrato di vertici* $(0, \pm\frac{3}{2})$, $(\pm\frac{3}{2}, 0)$?
3. *Dimostrare che ogni orbita ha un solo punto nell'insieme* $[0,1) \times [0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$.
4. *Dimostrare che* $[0,1] \times [0,1]$ *è un dominio fondamentale.*
5. *Data la retta di equazione* $y = \lambda x$, *dimostrare che esiste un'orbita che la interseca in almeno due punti distinti* $\iff \lambda \in \mathbb{Q}$

Esercizio 4. *Dire se le seguenti sono varietà topologiche.*

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1 \vee (x+1)^2 + y^2 = 1\}$
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1-\epsilon)^2 + y^2 = 1 \vee (x+1+\epsilon)^2 + y^2 = 1\}$ *per qualche* $\epsilon > 0$.

3. $\phi([0,\pi)) \cup [-1,1]$, *dove* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (cost, sint)$.

4. $\phi([0,\pi]) \cup [-1,1]$.

Esercizio 5. *Qual è il più grande sottoinsieme (se ne esiste uno massimale)* S *di* $\mathbb{R}$ *tale che* $0 \in S$ *e la* ϕ *del punto* 3 *dell'esercizio precedente, ristretta ad* S *sia*

1. un omeomorfismo locale (sull'immagine)

2. un omeomorfismo globale (sull'immagine)

Esercizio 6. *Classificare a meno di omeomorfismi le lettere dell'alfabeto.*